数理解析研究所講究録
第 1625 巻 2009 年 180-191

関孝和の円周率の微増と限界

Minute increments and limitations in the π calculation by Seki Takakazu.

杉本敏夫
Sugimoto Toshio

第1節　序

私はすでに論文集[1] の２号論文で、関の「求円周率術」([2]『関全集』p. 344～) の計算過程を詳しく解析し、29 号論文では「求弧術」([2]『関全集』p. 352～) を取り上げて、関の円周率計算についての私の解析方法を詳述した。

今回の研究はこれら先行研究を発展させた。論文集を参照せずに本稿の趣旨を述べるため、重複をいとわず説明し、これに加えて新しい発見と展開を解説する。

(甲) 関の求円周率術の過程の 256角までの周 A, 弦 a, 勾 c は、三角法による精密な計算とほぼ一致している。しかし 512角の周 A は、精密計算の値に比べて僅か超過している。なぜ関の値は《微増》したのか？　この原因の追究が第一の主題である。

(乙) 関は有限桁、すなわち仮数 (mantissa) ほぼ 17～23 桁を用いて計算した (第３節で具体的な数値を用いて説明する) 。この方法によれば、或る段階の勾 c から次の段階の勾 c' を求めても、前勾 c の 1/4 に等しい値しか得られない状態になる。いわゆる《桁落ち》が生じたのであり、これが表題に言う《限界》である。もはや計算を先に進めることはできない。この事実は、具体的な数値によって説明する。

(丙) 関は常にπを下から近似しているが、論理的にはπの上からの近似も必要であろう。すでにこの点についての論考があるが、私は新たに、円周率の研究とは別になされた関による研究を引用して、上からの近似を述べたいと思う。

関の円周率計算の筋道は、第２節に述べるように[3]『算俎』の方法を踏襲し、方法そのものは従来の研究に尽くされている。しかし私が今回述べる研究の狙いは、非常に微細な点を問題にしているため、なかなか理解を得にくいかと思われる。私の用いる論法の筋道を注意深く辿って頂くようお願いしたい。

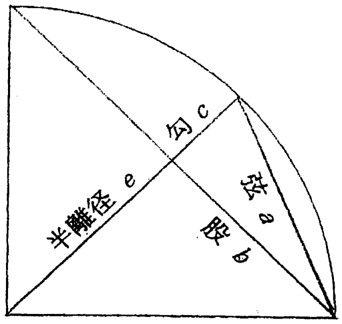
数値は[2]『関全集』より引用し、さらにその底本である写本「穴沢本」を参照した。

なお、論旨の見通しを良くするため、細かい計算は「補足」に回した。

第2節　計算方法

関の「求円周率術」は、円の内接正四角形 (正方形) から出発し、次々に八角、十六角を求めて行く。簡単のため (尺、寸の単位を外し) 、径＝1 と仮定する。関は或る正n角形の弦 a より一つ前の段階の弦　a の半分を股 b と呼ぶ。計算の途中で、

$$e=\sqrt{0.5^2-b^2}=\sqrt{0.25-b^2} \quad \cdots\cdots \quad ①$$



（ e は半離径と呼ばれる）、次に

$$c=0.5-e \qquad \cdots\cdots \quad ②$$

を求め、 c を勾と呼ぶ。そこで弦は

$$a=\sqrt{b^2+c^2} \qquad \cdots\cdots \quad ③$$

となる。〔補足１を参照〕

計算の復元のため、《逆向き》の計算を実行する。つまり、通常は一つ前の弦 $'a$ から、次の弦 a を求める。しかし私はその計算の方向を逆にして、関が計算によって求めた或る弦 a から、逆に辿って一つ前の弦 $'a$ を計算する。その際、股 b として上述の如く、求めるべき $'a$ の半分を用いるのは《同義反復》と思われるかもしれない。 しかし b は前の段階の $'a$ を《既知》として、その半分を言う。すなわち b は既定の値である。これに対して《逆向き》の計算によって、《新たに》前段階の弦 $'a*$ を求めるのだから、この計算は妥当である。

逆向きの計算の順序とは、関の示した 512角の弦 a を《既知》の出発値として、股 b（上述のようにこれも《既知》の値）を用いて、

$$c*=\sqrt{a^2-b^2} \qquad \cdots\cdots \quad ④$$

により勾 $c*$ を求め、

$$e*=0.5-c* \qquad \cdots\cdots \quad ⑤$$

により半離径 $e*$ を求め、

$$'a*=2\sqrt{0.5^2-e*^2} \qquad \cdots\cdots \quad ⑥$$

によって《逆向きに》求めた 256角の弦の推定値 $'a*$ を得る。

関に計算間違いがなければ、関自身の 256角の弦の $'a$ と、《逆向きに》求めた 256角の弦の推定値 $'a*$ とは一致する筈である。しかし後でお目にかけるように、二つの弦の値は食い違うのである。計算の中間の式⑤の段階で、得られた $e*$ は式①の e とはすでに 食い違う！ こうした具体例は、第４節で示す。

第３節　桁数と四捨五入

数値を具体的に示そう。関は 256角の周 A=3.14151 38011 44301 07633弱 を与えた。弱は「奇零表現」と呼ばれる。関は、通常の四捨五入をさらに精密化した

0＝整 ＜ 微強 ≦ 0.1 ≦ 強 ＜ 0.5＝半 ＜ 弱 ＜ 0.9 ≦ 微弱＜ 0＝整　…… ⑦

を用いた（微強と微弱は後述)。上記、弱の付いた 256角の周 A は、不等式で

3.14151 38011 44301 07632 5 ＜ A ＜ … 07632 9

と表される（44301 の 4 は底本「穴沢本」により補入)。さて関は 256角の弦 a として

0.01227 15382 85719 9261弱 （「穴沢本」の通り）

を与えた。

ここに注意すべき点がある。関の末位は 9261弱 となっている（有効数字の桁数で 18桁)。しかし、関はもっと下の桁まで a の値を知っていた筈である。さもなければ、関の

示した次の周 A の値（有効数字で 22 桁）は彼の示したほど精密には計算できない。A の値は a の値を256倍して得られるからである。つまり『全集』（その元の「穴沢本」）に示された値は、関が計算に実際用いたものに比べて、途中の桁までしか表示されていず、それに続く桁は隠されている。これは《重要な論点》である。

「弱」に隠された a の値を知るには、 A を 256 で割って求めた

0.01227 15382 85719 92607 93945 31… < $a=A/256$ < … 92607 94101 56…

と推定される。これが、隠された値を推定するための、私の《有力な技法》である。

再び《重要な論点》がある。A を 256 で割って求めた 256角の弦 a は詳しすぎる。元になる A が 22桁しかないのに、a の値は 26桁もある。すなわち …92607 939 もしくは …92607 941 の辺りまでしか、数値の有効性はない！（これは元になる A の 22桁に調子を合わせて言う。）そこで最終的に a として推定されるのは

0.01227 15382 85719 92607 939… < $a=A/256$ < … 92607 941…

が実際に即した不等式と言うことになる。

《零捨九入》とも言うべき微強と微弱の数値例を挙げよう。関は、四角(正方形)の弦 a および 32角の弦 a を微強・微弱つきで与えた。不等式では、その次の行になる。

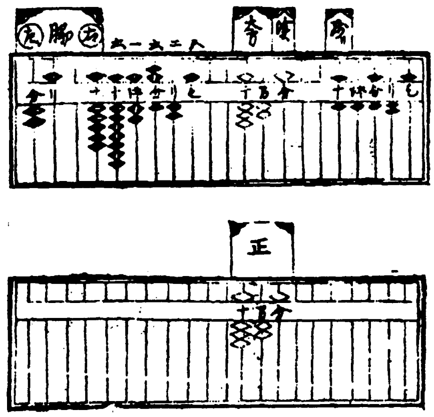
a=0.70710 67811 86547 5244微強　　　　　［実は　…52440 084…］

0.70710 67811 86547 52440 < a < 0.70710 67811 86547 52441

a=0.09801 71403 29560 602微弱　　　　　［実は　…60199 419…］

0.09801 71403 29560 6019 < a < 0.09801 71403 29560 6020

このように、微強と微弱のついた数値は、次の数字が 1 桁分余計に推定されるので、計算復元のためには有用である。「実は」として書き添えた精密計算の数値を見れば、0084 が微強であり、99419 が微弱であることが分かる。



関の数値の復元において、私が一番気を遣うのは次の論点である。明確に宣言すれば、

「 関の計算の追跡には、関が用いたのと同じ桁数による検算を心掛けるべきである。それはおよそ有効数字 22～23 桁である。」

参考までに、[4]『珠算算法の歴史』に出て来るソロバンの図の最大桁は 19桁であり、また[5]『改算記』(1659)の最大桁は、右図の開立法の 21桁である。

同じ考え方に立てば、512角の弧 b の計算には、256角の弦 $'a$ の半分の股 b

0.00613 57691 42859 96303 9697 < $b='a/2$ < … 96303 9705

を用いるべきである。計算機から出て来る数字を無闇に並べても関には迫れない！

第４節　難点の発生

式①から式③までの計算によって〔詳細は補足２〕 512角の勾 c を求めれば、

0.00003 76490 80427 72953 91766 86 < c < … 72953 91767 76

となる。上述のように、512角の周は A=3. 14157 29403 67091 3843弱 すなわち

3. 14157 29403 67091 38425 ＜ A ＜ … 67091 38429

であったから、512角の弦 a, 512角の勾 c を計算すれば、

0. 00613 58846 49154 47535 98632 8125＜ $a=A/512$ ＜… 47535 99414 0625

0. 00003 76490 80427 72957 66468 0307＜ $c^*=\sqrt{a^2-b^2}$ ＜…72958 81060 4171

を得る。上記(下からの) 勾 …72953 91766 86 ＜ c ＜…72953 91767 76

と比べれば、512角の勾 c^*(上からの c^*)のほうが大きい！ 〔詳細は補足２〕

私は、この二つの勾 c と c^* との食い違いは見過ごせないと考える。たかが末位のことではないか、と思われるかもしれない。しかし、これは《意味のある》食い違いである。関は有効数字約 20～22 桁を用いて計算しているのに、得られた数値は有効数字 15 桁目に食い違い（微増）が生じている。これが表題に掲げた「微増」の意味である。

第５節　三つの節

関の計算結果は、上述のように[2]『全集』の「求円周率術」に凡て示されている。私は、前節で述べた場合の他、 4096角から 8192角へ、32768角から 65536角へ、の二箇所にも同様な食い違いがあることを確かめた。いわば三つの節がある。関の計算した

8192角の周 3. 14159 25765 84872 66685 ＜ A ＜ …66689 は、

三角法の周 3. 14159 25765 84872 66568 16 よりも超過している。

65536角の周 3. 14159 26523 86591 35711 ＜ A ＜ …35715 は、

三角法の周 3. 14159 26523 86591 34850 よりもかなり超過している。

私は三角法で求めた周との比較を論じている。《塵も積もれば山となる》の諺に言うごとく、各段階で生じた超過は微小であったとしても、後に行くほど大きな超過になり累積する。計算の結果、早く精密な周 3. 14159 26535 89793 23846 2643… に近づけば良い、とは言えない。私たちにとっては既知な周の値も、当時の関にとっては [3]『算俎』の前例があるだけで、まさに《未知の数》であり、計算につれて少しづつ増えてはいくが、何処が上限か知りようがなかった。（上限については、第１０節で詳述する。）

第６節　開平法

関が計算を間違えないことは、[2]『全集』, p. 367～(またその元である「穴沢本」)に記載された松永良弼と藤田貞資による「訂正」を見ると、かなり上方の桁における数字の脱落と、末位の奇零表現の脱落を指摘しているだけである(これらは写本相伝の際の誤りと推定される)。それに対して、私がいま指摘した末位の数値の誤りについては、松永、藤田が何も述べていないことを見ると、恐らく両者は関の計算を追認したと言えよう。

私は、関が使った《開平法》に問題の鍵が潜む、と考える。和算に限らず、四則演算の次に来る難所は開平法であろう。平方数を２桁ごとに区切って、《普通の割り算》と似たやり方で割っていく（今の学校教育の）方法は関の時代には使われず、むしろソロバンに適した方法が主流であった。それは[4]『珠算算法の歴史』が詳しい。私も別稿[6]で当時

の開立法を詳述し、開平法もそこに述べた。

その原理は、平方数を Q とし、平方根の不足近似値を t とするとき、

$$(Q-t^2)/2t=u \qquad \cdots\cdots \qquad ⑧$$

によって Q の近似値 $t+u$ を求める(一段階法)。しかし $(t+u)^2>Q$ だから、

$$(Q-t^2)/(2t+u)=v \qquad \cdots\cdots \qquad ⑨$$

によって再び Q の近似値 $t+v$ を求めれば(二段階法)、$(t+u)^2>Q>(t+v)^2$ となる。いま $u-j=v$ と置けば、$(t+v)^2=(t+u)^2-2j(t+u)+j^2$ となり、$-2j(t+u)+j^2$ だけ近似が高まったが、まだ $(t+v)^2$ は Q より不足する。そこで $t+u$ を改めて第二の近似値 t と考えて、二回目の計算に取り掛かる云々。具体的な数値例は補足３に示す。

第７節　問題の焦点

当面の問題に戻ろう。256角の弦 a の関の値[補足３]は、

3. 14151 38011 44301 07632 5 ＜ A ＜…07632 9

0. 01227 15382 85719 92607 93945 31＜ $a=A/256$＜…92607 94101 56

sin(π/256)＝0. 01227 15382 85719 92607 94082 62 に極めて近い。すなわち、関の計算は正しく実行された。（ A の 44301 の 4 は底本「穴沢本」により補入した。）

一方で、512角の股 b は 256角の弦 a の半分であり、第４節に示したように、

0. 00613 57691 42859 96303 96972 66 ＜ b ＜…96303 97050 78

(1/2)sin(π/256)＝0. 00613 57691 42859 96303 97041 31 に極めて近い。すなわち関の計算は、この段階までは《精確に為された》と考えてよい。

以下、関の値のみ使って計算を続ける〔補足２〕。式①によって中間の値である半離径 e （第２節の図を参照）を求めれば、

$e=\sqrt{0.25-b^2}$

$=\sqrt{0.24996\ 23523\ 37025\ 52751\ 44707\ 90}$ ＞ e ＞ $\sqrt{\cdots 52751\ 44706\ 95}$

を得る。式⑧と式⑨により $e^2=0.25-b^2$ を開平する。その前に目標値の予想のため、e^2 の両辺のそれぞれ《正しい》平方根

（＃）　0. 49996 23509 19572 27046 12064 32 ＞ e ＞ …27046 12063 37

を求めておこう。これを下からの e と呼ぶことにする。

一方 ＊ を付した上からの e^* は、第３節で求めておいた c^* を 0. 5 から引けば、

（※）　0. 49996 23509 19572 27042 33530 62 ＞ e^* ＞ …27041 24304 80

が得られる。2704 に続く数字を比較してみよう。下からの e（＃）に比べて、上からの e^* (※)が小さいことは明瞭である。私が主題（甲）として問題にするのは、まさにこの点である。私はこの食い違いをこう考えた：

「関は下からの e を開平する際、正しい平方根を知らぬゆえ、開平の逐次近似の計算を途中までで止めたのだと《仮定》する。その結果として不足近似値が得られた。それこそが上記の上からの e^* であったのだ」

と。

第５節で言及した（今の学校教育で教える）開平計算は、１桁づつ正しい平方根の値が求まっていく。それに対して関の時代に使われた開平計算は、本質において《逐次近似》の方法であった。一回計算するごとに何桁づつかは前の値と一致する。その一致した部分は正しい値であると判断できても、それに続く部分のどこまでが正しいのか判断できない。（補足４を参照）

第８節　開平の途中段階

私は前節末に提出した仮説の確認のため、平方根のごく粗い近似値から出発し、次第に近似の程度を高めた。空論にならぬため、数値例を掲げる。出発の近似根：0.49 から

0.49000 0　0　0　→ 一段階法　0.50006 36248 33699 51787 19088 8
　　　　　　　　　→ 二段階法　0.49996 13318 67618 20666 49438 81
0.49990 0　0　0　→ 一段階法　0.49996 23548 07987 12493 94586 97
　　　　　　　　　→ 二段階法　0.49996 23509 19329 79084 28145 3
0.49996 20000 0 0　→ 一段階法　0.49996 23509 19695 42436 67226 5
　　　　　　　　　→ 二段階法　0.49996 23509 19572 27041 76029 4　　（＊）

この最後の値（＊）こそ、不等式に挟まれた

0.49996 23509 19572 27042 33531 97

＞ ※ e* ＞ …19572 27041 18939 58

であった！　関は正しい平方根（前節の＃）が何かを知らないから、恐らく《この辺（＊）で収束した》と判断した。つまり、開平の《途中段階》で計算を止めたのだ！ この値を用いて第５節で述べた計算を逆に辿れば、関自身の 256角の周 A に到達する：

3.14151 38011 44301 07632 5 ＞ A ＞ 3.14151 38011 44301 07632 9

（末位は …07633弱 に相当する。）私の復元は、以上である。

望蜀ながら、関がもう二回、一段階法の計算を進めたならば、

0.49996 23500 0 0　→ 一段階法　0.49996 23509 19572 27130 65001 66
0.49996 23509 0 0　→ 一段階法　0.49996 23509 19572 27046 12064 29

を得る。この最後の平方根こそ、第７節で触れた《正しい》平方根（＃）であった。つまり、関は正しい平方根に到達する前に、逐次近似法の計算を打ち切ったのだ！

関の計算が、第４節、第５節で指摘したように、《途中から微増した》原因を、私はこのように推測したのである。（第二の節については、補足５を参照）

第９節　関の方法の限界

次には、第１節「序」で提起した（乙）の問題を検討しよう。

256角と 512角の検算は第３節で述べた。16384＝2^{14}角から 130172＝2^{17}角までの計算結果は、第１０節で述べる。（中間の値は補足６を参照）

関に代わって計算を続けよう。ただし（問題の焦点を絞るために）以下には各角の勾 c のみ示す。

$262144=2^{18}$角の勾	0.00000 00001 43621 64657 52930 15
$524288=2^{19}$角の勾	0.00000 00000 35905 41164 51124 52
$1048576=2^{20}$角の勾	0.00000 00000 08976 35291 13586 88
$2097152=2^{21}$角の勾	0.00000 00000 02244 08822 78447 08
$4194304=2^{22}$角の勾	0.00000 00000 00561 02205 69614 918
$8388608=2^{23}$角の勾	0.00000 00000 00140 25551 42403 93
$16777216=2^{24}$角の勾	0.00000 00000 00035 06387 85600 995
$33554432=2^{25}$角の勾	0.00000 00000 00008 76596 96400 25

数値計算については、第２節に述べた。ここで問題となるのは、n 角の勾 c からその２倍の $2n$ 角の勾 c' を求める計算である。それは要約すれば、

$$c'=(1-\sqrt{1-c})/2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad ⑩$$

である。私は関の方法の限界を論じている。ここで問題にするのは微妙な差であって、

$$c'>c/4 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad ⑪$$

の如く一般に c' は $c/4$ よりも大きい。これは式⑩を展開してみれば分かるように、

$$c'=(1-(1-c/2-c^2/8-\cdots))/2=c/4+c^2/16+\cdots \quad \cdots\cdots\cdots \quad ⑫$$

と、補正項 $c^2/16+\cdots$ の分だけ大きい。しかし勾 c が《ごく小さい値》の場合には、補正項 $c^2/16+\cdots$ は無視できるほど小さい。従って、勾 c から次矢 c' を計算してみて、

「c' が c の丁度 1/4 に等しくなったとき」

は、も早やそれ以上計算を進められない。これが私の主張する《限界》である。

いま得られた数値によって計算すれば、

2^{25}角の勾 c' は	0.00000 00000 00008 76596 96400 25
2^{24}角の勾 c の 1/4	0.00000 00000 00008 76596 96400 249

と差がない！　計算はこれ以上進めても無意味である。（勿論、初めから多くの桁を用いたならば、計算は続けられ、その限界は2^{25}角よりも後になって生ずることになる。）

関は第５節で述べたように、三角関数で求めた値に比べて過剰な値を用いているから、もっと早い段階で限界に達したかも知れない。これが、私が表題に掲げた「関の限界」の意味である。

第１０節　増約術

いま 2^{14}角、2^{15}角、2^{16}角、2^{17}角の周を f, g, h, j とし、その差を次のように置く。

$u=g-f,\quad v=h-g,\quad w=j-h$

$f=3.14159\ 26343\ 38562\ 99082\ 5$

$g=3.14159\ 26487\ 76985\ 67077\ 5$

$h=3.14159\ 26523\ 86591\ 35712\ 5$

$j=3.14159\ 26532\ 88992\ 77587\ 5$

$u=0.00000\ 00144\ 38422\ 67995\ 0$

$v=0.00000\ 00036\ 09605\ 68635\ 0$

$w=0.00000\ 00009\ 02401\ 41875\ 0$

簡単のため底本末位の強と弱の代わり、便宜的に 0.25 と 0.75 を付した。比を見ると、

$v/u=0.25000\ 00011\ 33260\ 90825\ 15$

$w/v=0.24999\ 99992\ 13903\ 05574\ 64$

どちらの比も 0.25 と見做し得る。そこで、この先も同様になると考えて、關は

$\pi=h+w+0.25\cdot w+0.25^2\cdot w+\cdots=h+w\cdot(\ 1+0.25+0.25^2+\cdots\ )$

と考えて（關は無限級数の概念をもっていたと推測される）、さらに關の『全集』[2]の「諸約之法」の中の「増約」の公式を用いて、（途中で 0.25 を w/v に置き換えて）

$\pi=h+w\cdot(1/(1-0.25))=h+w\cdot(1/(1-w/v))=h+v\cdot w/(v-w)$ …… ⑬

なる公式を得た。上記の数値を当てはめれば、

$\pi=h+0.00000\ 00012\ 03201\ 89=3.14159\ 26535\ 89793\ 25$

が得られる。關は《3.14159 26535 9弱 を以って定周》と定めた。末位は …89793 2 まで正しい。關はせっかく小数 16桁まで得ておきながら、計算に自信の持てる桁までを以って《定周》としたのであろう。（この解釈には、別の意見もあり得る。）

第１１節　上下からπを挟む不等式

さいごに（丙）の問題を考察する。關も（和算家も一般に）円の内接多角形でπの近似値を求めた。これではπの下からの近似値しか得られない、と言う批判が生ずる。

竹之内脩氏は近著［7］『π』と[8]『關孝和の数学』において、定周の根拠として

「π～h+w/(1−0.25) がπの下限、π～h+w/(1−0.251) がπの上限を与える」

と述べた。下限のほうはこれで良い。しかし上限の分母に何故 0.251 を用いるのか、明確に説明を述べておられない。私は上限の式は 0.251 の代わりに 0.2501 でもよいことを確かめ、0.25001 では微妙なことを知った。（もちろん、用いる数値の精度（桁数）によって異なると思われるのであるが。）私は、その代わりに

「πを上下から挟むならば、關の[2]『全集』の「角術」を利用すべきである」

と主張する。關の角術から、彼が求めた正十六角についての、

「円の内接辺が１のときの半径 2.5629 と、外接辺が１のときの半径 2.5137」

（關の言葉では平中径および角中径）を用いればよい。これらの数の逆数を求め、半径を直径に直すため 16 ではなく 16/2 を掛けて、

$(16/2)\cdot(1/2.5629)=3.1215 \quad < \quad \pi \quad < \quad (16/2)\cdot(1/2.5137)=3.1826$

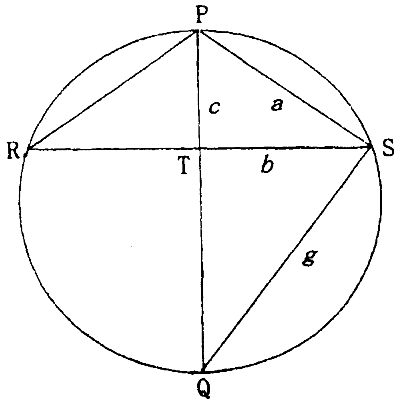
と計算する。こうして簡単に 3.1215 と 3.1826 で πを挟む不等式が得られた！

關は「角術」において、正弦と正接のそれぞれ半角公式に相当する式を用いているから、三十二角の値を求めることも出来た筈であり、より狭い不等式

$3.1365 \quad < \quad \pi \quad < \quad 3.1517$

も得ようとすれば得られた。角数を増しさえすれば、上下から挟むもっと狭い限界が得られるが、論理上はともかくπを挟む不等式が得られさえすればよい。実は、円の内・外接の正方形の周でも、論理的な不等式（$2.828\cdots<\pi<4$）が得られる。

補足１



直径 PQ＝1 の円に補助線 SQ＝g を引く。 △PSQ ∽ △STQ ∽ △PTS から、1 : a ＝g : b ＝ a : c ，よって

$$a^2=c,\quad a=\sqrt{c} \qquad \cdots\cdots\cdots \qquad ⑭$$

が成立する。彼は気付かず、迂遠な式 ①，②，③ を用いた。

補足２

256角から 512角への移行（下からの計算とも呼ぶ）

3.14151 38011 44301 07632 5	< A <	…07632 9
0.00613 57691 42859 96303 96972 66	< $b=A/512$ <	…96303 97050 78
0.00003 76476 62974 47248 55292 09536	< b^2 <	…47248 55293 05412
0.24996 23523 37025 52751 44707 90464	> $e^2=0.25-b^2$ >	…52751 44706 94588
0.49996 23509 19572 27046 12064 32487	> e >	…27046 12063 36595
0.00003 76490 80427 72953 87935 67513	< #$c=0.5-e$ <	…72953 87936 63405
0.00000 00014 17453 25705 36474 31756 8	< c^2 <	…25705 36474 31764 0
0.00003 76490 80427 72953 91766 41293	< $a^2=b^2+c^2$ <	…72953 91767 37176
0.00613 58846 49154 47535 96310 1760	< a <	…47535 96388 3090
0.00613 58846 49154 47535 9<u>8632 8125</u>	< $a*=A/512$ <	…47535 9<u>9414 0625</u>

512角の周 A から求めた弦 $a*$ よりも不足している。これが第４節の重要な論点となる。

次に 512角の周 A から求めた弦 $a*=A/512$ を出発して《逆に遡って》計算する。これを「上からの計算」と呼ぶことにする。以下では区別のために、* を付ける。

0.00003 76490 80427 72953 91794 91582	< $a*^2$ <	…72953 91804 50308
0.00003 76476 62974 47248 55292 09536	< $b*^2$ <	…47248 55293 05412
0.00000 00014 17453 25705 36502 82046	< $c*^2=a*^2-b*^2$ <	…25705 36511 44096
0.00003 76490 80427 72957 66469 38109	<※$c*=\sqrt{a*^2-b*^2}$<	…72958 75695 19626

これが第４節で引用した $c*$ に相当し、第７節の $e*=0.5-c*$ も直ちに得られる。

0.49996 23509 19572 27042 33530 61891	> $e*=0.5-c*$ >	…27041 24304 80374

$b*^2$ は上記の b^2 と同じとした。※c* が上記の #c よりも大きいことが分かる。

補足３

八角を例に取る。股 b は四角の弦 $a=\sqrt{0.5}=0.70710\ 6781$ の半分 $b=0.35355\ 3391$ で、八角の勾 c は、$c=0.5-b=0.1464\ 46609$. 八角の弦 a は平方根 $\sqrt{c}$ を求める。

一回目

仮の根 0.3 から $(a-0.3^2)/0.6=0.09407\ 7682$, 一段階法の根 $\sqrt{c}=0.39407\ 7682$ を得るが、自乗は 0.15529 7220 で、根としては不十分。二段階法は 0.6＋0.09407 7862＝0.69407 7682 で $(a-0.3^2)/0.69407\ 7682=0.08132\ 6068$ を得て、根 0.38132 6068 となる。その自乗は 0.14540 9570 で、２桁しか合わず、まだ目標から遠い。

二回目

仮の根を 0.38 とする。$(a-0.38^2)/0.76=0.00269\ 2907$, そこで一段階法の根 $\sqrt{c}=0.38269\ 2907$ を得る。その自乗は 0.14645 3861 で、まだ不足する。二段階法は $0.76+0.00269\ 2907=0.76269\ 2907$ で $(a-0.38^2)$ を割って、0.00268 3399, 0.38 に足して、0.38268 3399. その自乗は 0.14644 6584 で、目標 0.14644 6609 に近づいた。

三回目

仮の根を 0.3826 とする。 $(a-0.3826^2)/0.7652=0.00008\ 3441$, そこで一段階法の根 $\sqrt{c}=0.38268\ 3441$ を得る。その自乗は 0.14644 6616, 目標に近い。二段階法は $(a-0.3826^2)/0.76528\ 3441=0.00008\ 34318$, $0.38268\ 342318^2=0.14644\ 6609$, これで目標に達した。 この補足3の例題の数値例は桁数が短いから、すぐに平方根に達した。

本文の問題はもっと桁数が長く、どこまで計算すれば収束するのか判断しにくい。これが第7節の末尾で述べた難点であった。

なお一般に、一段階法は過剰な近似値を与え、二段階法は不足の近似値を与える。

補足4

第8節の値を先取りし、そのことを説明する。収束の遅い一段階法の値のみを用いる。

(1)	0.49900 0 0 0	→	一段階法	0.49996 32788 94815 15783 01310
(2)	0.49990 0 0 0	→	一段階法	0.49996 23548 07987 12493 94587
(3)	0.49996 0 0 0	→	一段階法	0.49996 23509 25099 53547 73090
(4)	0.49996 20000 0 0	→	一段階法	0.49996 23509 19695 42436 67227
(5)	0.49996 23000 0 0	→	一段階法	0.49996 23509 19674 86345 91756
(6)	0.49996 23500 0 0	→	一段階法	0.49996 23509 19572 27130 65002
(7)	0.49996 23509 0 0	→	一段階法	0.49996 23509 19572 27046 12064
(8)	0.49996 23509 10000 0	→	一段階法	0.49996 23509 19572 27046 09149
(9)	0.49996 23509 19000 0	→	一段階法	0.49996 23509 19572 27046 08237
(10)	0.49996 23509 19500 0	→	一段階法	0.49996 23509 19572 27046 08234
(11)	0.49996 23509 19570 0	→	一段階法	0.49996 23509 19572 27046 08233
(12)	0.49996 23509 19572 0	→	一段階法	0.49996 23509 19572 27046 08233

このように (12) で収束したが、《前の根との一致部分を用いる》という原則に立てば、(1), (3), (6), (9), (12) という《飛び飛び》の近似値を辿って、収束値に到達する。二段階法では余りに早く収束するので、一段階法によって例示した。

本文に述べた、前の根との一致部分がどのくらいの速さで出現するかは、経験によって分かる。恐らく関は或る程度の経験は有したが、この円周率計算の場合は先を急ぐため、《この辺で収束しただろう》と判断して、開平計算を打ち切ったのであろう。考えても見よ。関が使用できた武器は《ソロバン》である。同じような計算を繰り返して行く途中では、何処で《収束》したのか判断しにくい。

《計算を打ち切った》と私が判断できるのは、多桁の数値処理を自作して搭載したプロ

グラム電卓を使ったからである。もちろん普通の計算機には、ここで述べたような《開平の算法》は存在せず、内部処理は《対数計算》（長桁の数値を一旦対数に直し、２で割り、再び真数に戻す）を実行するから、殆ど関の計算を検算したことにはならない。

補足５

第５節で述べた《第二の節》すなわち4096角から8192角への移行の際、第７節で述べたのと同様な状況が見られる。すなわち、下から計算した半離径 e に比べて、上から計算した半離径 $e*$ が不足している。その原因を第８節で述べた「開平の途中段階で近似計算を止めた」ことに起因する、と考えた。私は甚だ微妙な点を問題にしている。局面を率直に提示するに止めたい。

上からの $e*$ は

0.4999 98529 31441 10925.58925 77＞ $e*$ ＞10925.58925 68

であり、下からの e は

0.4999 98529 31441 10958.01141 0＞ e ＞10958.01140 9

であり、上からの $e*$ は下からの e よりも不足している。

二段階法によれば、近似値

0.49999 90000 0 0 → 0.49999 98529 31441 10895.96113 0

0.49999 98000 0 0 → 0.49999 98529 31441 10957.99657 9

であって、この中間で上からの $e*$ がほぼ再現される。即ち、「関が計算の途中段階で計算をやめたことに起因する」という私の仮説は辛うじて成立する。

一段階法のみで真の値に近づくためには、さらに計算を続けて行なう。近似値は

0.49999 98520 0 0 → 0.49999 98529 31441 11044.77

0.49999 98529 0 0 → 0.49999 98529 31441 10958.11

となって、一段階法のみでも上からの $e*$ がほぼ再現される。

しかし、私は《第三の節》すなわち32768角から65536角への移行の際に期待される、これと同様な現象を説明する計算に成功していない。その解決は他日に期す。

補足６

十六角から 130172角まで、私の復元値を示す。股 b は前角の弦 a の半分ゆえ、省略。[2]『全集』の数値と比べてみよ。関が末位を「奇零表現」で覆った所を私は復元した。比較のため、三角法で求めた周を《三》の欄に示した。

十六角	勾 0.03806 02337 44356 62193 6	周 3.12144 51522 58052 28556 8
	弦 0.19509 03220 16128 26784 8	三 3.12144 51522 58052 28557 3
三十二角	勾 0.00960 73597 98384 77543 7	周 3.13654 84905 45939 26384 0
	弦 0.09801 71403 29560 60199 5	三 3.13654 84905 45939 26381 4
六十四角	矢 0.00960 73597 98384 77543 7	周 3.14033 11569 54752 91232.0
	弦 0.04906 76743 27418 01425 5	三 3.14033 11569 54752 91231.7

百二十八角	勾	0.00060 22718 97413 80364 262	周	3.14127 72509 32772 86807 68
	弦	0.02454 12285 22912 28803 185	三	3.14127 72509 32772 86806 20
２５６角	勾	0.00015 05906 51897 88994 211	周	3.14151 38011 44301 07632 64
	弦	0.01227 15382 85719 92607 942	三	3.14151 38011 44301 07632 85
５１２角	勾	0.00003 76490 80427 72953 918	周	3.14157 29403 67091 38426 88
	弦	0.00613 58846 49154 47535 99	三	3.14157 29403 67091 38413 58
１０２４角	勾	0.00000 94123 58699 42867 1506	周	3.14158 77252 77159 70076 67
	弦	0.00306 79567 62965 97627 0280	三	3.14158 77252 77159 70062 89
２０４８角	勾	0.00000 23530 95211 91424 421	周	3.14159 14215 11199 97414 00
	弦	0.00153 39801 86284 76561 2373	三	3.14159 14215 11199 97399 80
４０９６角	勾	0.00000 05882 74149 04503 54872	周	3.14159 23455 70117 74248 75
	弦	0.00076 69903 18742 70452 6974	三	3.14159 23455 70117 74234 07
８１９２角	勾	0.00000 01470 68558 89041 9886	周	3.14159 25765 84872 66684 11
	弦	0.00038 34951 87571 39558 9214	三	3.14159 25765 84872 66568 16
１６３８４角	勾	0.00000 00367 67141 07422 76343	周	3.14159 26343 38562 99081 73
	弦	0.00019 17457 97310 70330 7545	三	3.14159 26343 38562 98909 55
３２７６８角	勾	0.00000 00091 91785 35309 58266	周	3.14159 26487 76985 67077 89
	弦	0.00009 58737 99095 97734 591	三	3.14159 26487 76985 66948 53
６５５３６角	勾	0.00000 00022 97946 34355 4514	周	3.14159 26523 86591 35714.99
	弦	0.00004 79368 99603 06688 4722	三	3.14159 26523 86591 34580 36
１３０１７２	勾	0.00000 00005 74486 58621 86633	周	3.14159 26532 88992 77592 99
角	弦	0.00002 39684 49808 41821 88105	三	3.14159 26532 88992 76527 18

第５節で指摘したが、５１２角の周は三角法で求めた周よりも小数19桁に1.33単位の過剰がある（第一の節）。８１９２角の周は過剰の度合いが一段と進み、三角法の周よりも小数18桁に1.1595単位の過剰があり（第二の節）、６５５３６角の周は、小数17桁に1.13463単位の過剰が生じている（第三の節）。各節で過剰が一桁づつ繰り上がることに注目！

文献

[1] 杉本敏夫：解読・関孝和－－天才の思考過程、海鳴社、2008.

[2] 平山諦・広瀬秀雄・下平和夫編集：関孝和全集、大阪教育図書、1980.

[3] 村松茂清 原著・佐藤健一著：算 －現代訳と解説－、研成社、1987.

[4] 山崎與右衛門・戸谷清一・鈴木久夫：珠算算法の歴史、森北出版、1958.

[5] 山田正重 原著・佐藤健一著：改算記、研成社、1659.

[6] 杉本敏夫：開立法のある難点の解決、数学史研究、190号、2006.

[7] 竹之内脩：π－πの計算 アルキメデスから現代まで－、共立出版、2007

[8] 竹之内脩：関孝和の数学、共立出版、2008.

(2008. 8. 5 発表、11. 25 記)